~ CURS 6 ~

II.4. Metoda componentelor simetrice

Un sistem trifazat nesimetric ordonat poate fi descompus în trei sisteme simetrice: un sistem direct, un sistem invers și un sistem homopolar, descompunerea fiind unică și mereu posibilă (*teorema lui Fortescue*).

$$\underline{M}_1 = \underline{M}_h + \underline{M}_d + \underline{M}_i;$$

$$\underline{M}_2 = \underline{M}_h + a^2 \cdot \underline{M}_d + a \cdot \underline{M}_i;$$

$$\underline{M}_3 = \underline{M}_h + a \cdot \underline{M}_d + a^2 \cdot \underline{M}_i$$

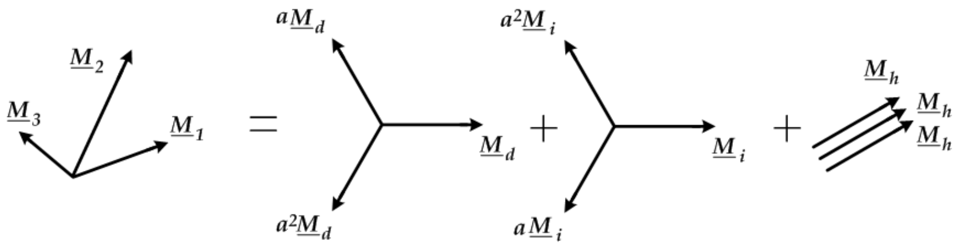


Fig. 2.7. Descompunerea unui sistem nesimetric cu ajutorul teoremei lui Fortescue

Sistemul anterior în raport cu componentele simetrice este:

$$\underline{M}_h = \frac{1}{3}(\underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3);$$

$$\underline{M}_d = \frac{1}{3}(\underline{M}_1 + a \cdot \underline{M}_2 + a^2 \cdot \underline{M}_3);$$

$$\underline{M}_i = \frac{1}{3}(\underline{M}_1 + a^2 \cdot \underline{M}_2 + a \cdot \underline{M}_3).$$

II.5. Puteri în sisteme trifazate

Fie un cuadripol reprezentat de un receptor trifazat (fig. 2.8) pentru care putem defini următoarele puteri:

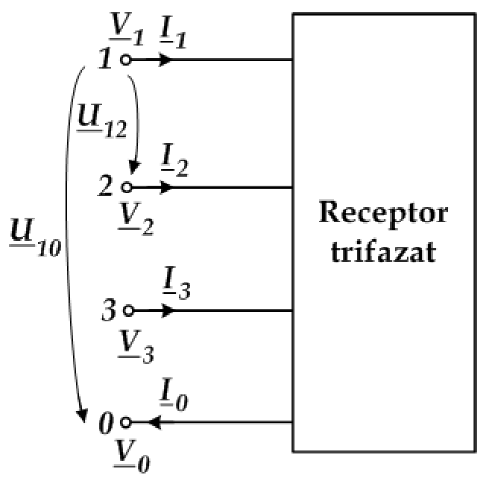


Fig. 2.8. Puteri în circuite trifazate

$$\left.\begin{array}{l}\underline{S}_g = \underline{V}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{V}_2 \cdot \underline{I}_2^* + \underline{V}_3 \cdot \underline{I}_3^* + \underline{V}_0(-\underline{I}_0^*) \\ \text{Dar } \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{S}_g = (\underline{V}_1 - \underline{V}_0) \cdot \underline{I}_1^* + (\underline{V}_2 - \underline{V}_0) \cdot \underline{I}_2^* + (\underline{V}_3 - \underline{V}_0) \cdot \underline{I}_3^* =$$
$$= \underline{U}_{10} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \cdot \underline{I}_3^*$$

Sistemul este dezechilibrat, deci:

$$\begin{cases}\underline{U}_{10} = U_1 \cdot e^{j\cdot\alpha_1} & \underline{U}_{20} = U_2 \cdot e^{j\cdot\alpha_2} & \underline{U}_{30} = U_3 \cdot e^{j\cdot\alpha_3} \\ \underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j\cdot\beta_1} & \underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\cdot\beta_2} & \underline{I}_3 = I_3 \cdot e^{j\cdot\beta_3}\end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{S}_g = U_{10} \cdot I_1 \cdot e^{j\cdot\varphi_1} + U_{20} \cdot I_2 \cdot e^{j\cdot\varphi_2} + U_{30} \cdot I_3 \cdot e^{j\cdot\varphi_3}$, unde $\varphi_j = \alpha_j - \beta_j$

Partea reală a puterii complexe reprezintă puterea activă trifazată furnizată receptorului:

$$P_g = \mathcal{Re}\{\underline{S}_g\} = U_{10} \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_1 + U_{20} \cdot I_2 \cdot \cos\varphi_2 + U_{30} \cdot I_3 \cdot \cos\varphi_3$$

Partea imaginară a puterii complexe este puterea reactivă trifazată furnizată receptorului:

$$Q_g = \mathcal{Im}\{\underline{S}_g\} = U_{10} \cdot I_1 \cdot \sin\varphi_1 + U_{20} \cdot I_2 \cdot \sin\varphi_2 + U_{30} \cdot I_3 \cdot \sin\varphi_3$$

În afara acestor puteri definite la bornele receptorului, se mai pot exprima puterile consumate în elementele rezistive și reactive ale circuitului:

$$\underline{S}_C = \underline{Z}_1 \cdot I_1^2 + \underline{Z}_2 \cdot I_2^2 + \underline{Z}_3 \cdot I_3^2 + \underline{Z}_0 \cdot I_0^2 = \sum_{k=0}^{3} R_k \cdot I_k^2 + j\sum_{k=0}^{3} X_k \cdot I_k^2,$$

unde:
$$P_C = \mathcal{Re}\{\underline{S}_C\} = \sum_{k=0}^{3} R_k \cdot I_k^2$$
$$Q_C = \mathcal{Im}\{\underline{S}_C\} = \sum_{k=0}^{3} X_k \cdot I_k^2 = \sum_{k=0}^{3} (X_{L_k} - X_{C_k}) I_k^2$$

A. Puteri în sisteme trifazate în regim simetric și echilibrate

Dacă sistemul tensiunilor de alimentare ale unui receptor trifazat echilibrat în conexiune stea au conductor neutru este simetric de succesiune directă:

$$u_{10}(t) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin(\omega t + \alpha) \Rightarrow \underline{U}_{10} = U_f \cdot e^{j\cdot\alpha}$$
$$u_{20}(t) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \underline{U}_{20} = U_f \cdot e^{j\cdot(\alpha - \frac{2\pi}{3})} = a^2 \cdot \underline{U}_{10}$$
$$u_{30}(t) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \underline{U}_{30} = U_f \cdot e^{j\cdot(\alpha + \frac{2\pi}{3})} = a \cdot \underline{U}_{10}$$

și sistemul curenților este de succesiune directă:

$$i_1(t)=\sqrt{2}\cdot I_f\sin(\omega t+\beta)\Rightarrow \underline{I}_1=I_f\cdot e^{j\cdot\beta}$$
$$i_2(t)=\sqrt{2}\cdot I_f\sin(\omega t+\beta-\frac{2\pi}{3})\Rightarrow \underline{I}_2=I_f\cdot e^{j\cdot(\beta-\frac{2\pi}{3})}=a^2\cdot\underline{I}_1$$
$$i_3(t)=\sqrt{2}\cdot I_f\sin(\omega t+\beta+\frac{2\pi}{3})\Rightarrow \underline{I}_3=I_f\cdot e^{j\cdot(\beta+\frac{2\pi}{3})}=a\cdot\underline{I}_1$$

Puterea instantanee totală este:

$$p=u_{10}\cdot i_1+u_{20}\cdot i_2+u_{30}\cdot i_3=3\cdot U_f\cdot I_f\cdot\cos\varphi$$

Puterea complexă trifazată transmisă receptorului este:

$$\underline{S}_g=\underline{U}_{10}\cdot\underline{I}_1^*+\underline{U}_{20}\cdot\underline{I}_2^*+\underline{U}_{30}\cdot\underline{I}_3^*=$$
$$=U_f\cdot e^{j\cdot\alpha}I_f\cdot e^{-j\cdot\beta}+U_f\cdot e^{j\cdot\alpha}\cdot a^2\cdot I_f\cdot e^{-j\cdot\beta}\cdot a+U_f\cdot e^{j\cdot\alpha}\cdot a\cdot I_f\cdot e^{-j\cdot\beta}\cdot a^2$$

- conexiunea stea: $\begin{cases}U_l=\sqrt{3}\cdot U_f\\ I_l=I_f\end{cases}\Rightarrow U_l\cdot I_l=\sqrt{3}\cdot U_f\cdot I_f$

- conexiunea triunghi: $\begin{cases}U_l=U_f\\ I_l=\sqrt{3}\cdot I_f\end{cases}\Rightarrow U_l\cdot I_l=\sqrt{3}\cdot U_f\cdot I_f$

$$\Rightarrow\underline{S}_g=\sqrt{3}\cdot U_l\cdot I_l\cdot e^{j\cdot\varphi}$$

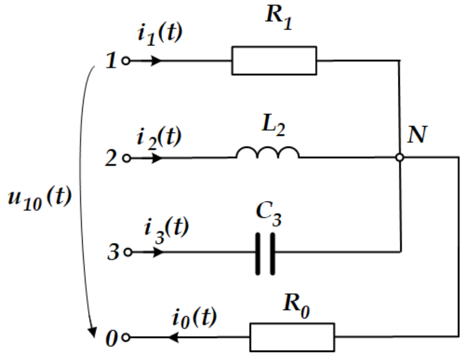
Atunci puterile active și reactive sunt:

$$P_g=3\cdot U_f\cdot I_f\cdot\cos\varphi=\sqrt{3}\cdot U_l\cdot I_l\cdot\cos\varphi$$
$$Q_g=3\cdot U_f\cdot I_f\cdot\sin\varphi=\sqrt{3}\cdot U_l\cdot I_l\cdot\sin\varphi$$

Factorul de putere pentru un circuit trifazat în regim simetric se definește cu relația:

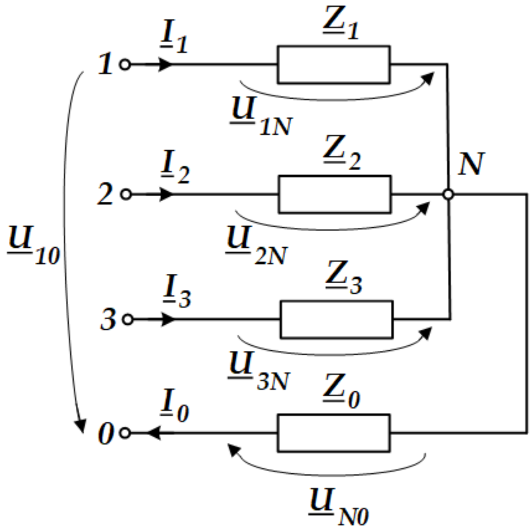
$$K=\cos\varphi=\frac{P_g}{S_g}$$

Aplicație. Circuitul din figura de mai jos este alimentat de la un sistem trifazat de tensiuni simetrice, de succesiune directă, și are următoarele date: $u_{10}(t)=120\sin(\omega t)\,(V)$, $R_1=R_0=\frac{10\sqrt{3}}{3}\,\Omega$, $L_2=\frac{50}{\pi}$ mH, $C_3=\frac{2}{\pi}$ mF, $f=50$ Hz. Să se afle intensitățile curenților de fază, tensiunea $u_{N0}(t)$ și să se verifice bilanțul puterilor.



Tensiunile fiind simetrice de succesiune directă, avem:

$$\underline{U}_{10} = 120e^{j0} = 120,$$
$$\underline{U}_{20} = a^2\underline{U}_{10} = 60 \cdot \left(-1 - j\sqrt{3}\right),$$
$$\underline{U}_{30} = a\underline{U}_{10} = 60 \cdot \left(-1 + j\sqrt{3}\right)$$



$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 100\pi \quad \underline{Z}_1 = \underline{Z}_0 = R_1 = \frac{10\sqrt{3}}{3}, \quad \underline{Z}_2 = j\omega L_2 = 5j, \quad \underline{Z}_3 = -\frac{j}{\omega C_3} = -5j$$

Acest circuit este conectat în stea, însă are și o impedanță nenulă pe firul neutru. De aceea, vom aplica inițial formula lui Millman:

$$\underline{U}_{N0} = \frac{\underline{U}_{10}\underline{Y}_1 + \underline{U}_{20}\underline{Y}_2 + \underline{U}_{30}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0} =$$

$$= \frac{120 \cdot \frac{3}{10\sqrt{3}} - 60(1 + j\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{5j} - 60(1 - j\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{-5j}}{\frac{3}{10\sqrt{3}} + \frac{1}{5j} + \frac{1}{-5j} + \frac{3}{10\sqrt{3}}} = -60$$

Curenții electrice se calculează:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10} - \underline{U}_{N0}}{\underline{Z}_1} = \frac{120 + 60}{\frac{10\sqrt{3}}{3}} = 18\sqrt{3} \Rightarrow i_1(t) = 18\sqrt{6}\sin(\omega t)\ (A)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{20} - \underline{U}_{N0}}{\underline{Z}_2} = \frac{-60 - 60\sqrt{3}j + 60}{5j} = -12\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow i_2(t) = 12\sqrt{6}\sin(\omega t + \pi)\ (A)$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{30} - \underline{U}_{N0}}{\underline{Z}_3} = \frac{-60 + 60\sqrt{3}j + 60}{-5j} = -12\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow i_3(t) = 12\sqrt{6}\sin(\omega t + \pi)\ (A)$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 18\sqrt{3} - 12\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow i_0(t) = 6\sqrt{6}\sin(\omega t + \pi)\ (A)$$

Bilanțul puterilor

$$P_c = \mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\}\cdot I_1^2 + \mathrm{Re}\{\underline{Z}_2\}\cdot I_2^2 + \mathrm{Re}\{\underline{Z}_3\}\cdot I_3^2 + \mathrm{Re}\{\underline{Z}_0\}\cdot I_0^2 =$$

$$= 10\frac{\sqrt{3}}{3}\left(18\sqrt{3}\right)^2 + 10\frac{\sqrt{3}}{3}\left(6\sqrt{3}\right)^2 = 3600\sqrt{3}\,(W)$$

$$Q_c = \mathrm{Im}\{\underline{Z}_1\}\cdot I_1^2 + \mathrm{Im}\{\underline{Z}_2\}\cdot I_2^2 + \mathrm{Im}\{\underline{Z}_3\}\cdot I_3^2 + \mathrm{Im}\{\underline{Z}_0\}\cdot I_0^2 =$$

$$= 5\cdot\left(12\sqrt{3}\right)^2 - 5\cdot\left(12\sqrt{3}\right)^2 = 0\,(VAR)$$

$$\underline{S}_g = \underline{U}_{10}\cdot \overset{*}{\underline{I}_1} + \underline{U}_{20}\cdot \overset{*}{\underline{I}_2} + \underline{U}_{30}\cdot \overset{*}{\underline{I}_3} = 120\cdot 18\sqrt{3} +$$

$$+60\cdot\left(-1 - j\sqrt{3}\right)\cdot(-12\sqrt{3}) + 60\cdot\left(-1 + j\sqrt{3}\right)\cdot(-12\sqrt{3}) = 3600\sqrt{3}$$